# 信息经济学

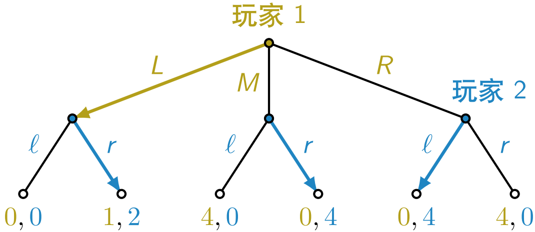
## 第七课：子博弈完美纳什均衡

彭世喆

数字经济系
长沙理工大学经济与管理学院

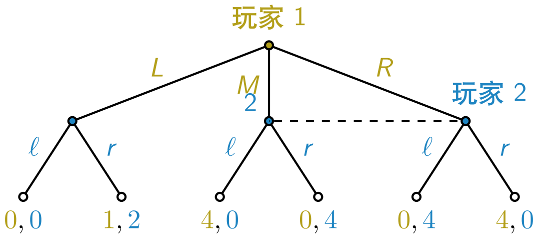
# 信息集（Information set）

- 玩家 2 决策时知道玩家 1 选择的是 $L$、$M$ 还是 $R$



# 信息集

- 如何表示玩家 2 不能区分玩家 1 选择了 $M$ 还是 $R$？(可以区分出 $L$)



# 信息集

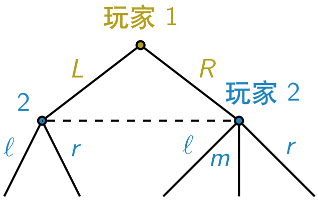
## 信息集

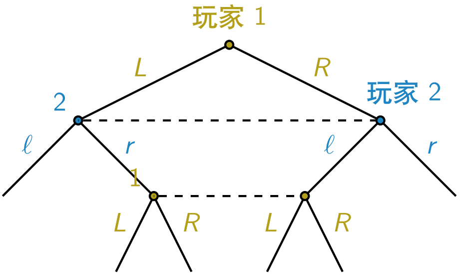
玩家 $i$ 的一个信息集是其不能区分的节点的集合。这些信息集是玩家 $i$ 决策节点集合的一个划分（Partition）。

- 如果一个信息集只包含一个节点，那么玩家行动时就知道自己在这个节点
- 如果一个信息集包含多个节点，那么玩家行动时不知道自己具体在哪个节点

# 信息集

- 同一个信息集中的节点，必须满足 $A_i(x) = A_i(x')$（如果位于同一信息集的节点的行为集不同，就能判断在哪个节点了）
- 拥有完美记忆（Perfect recall），即记得自己以前的行为（当玩家 1 第二次决策时，可以通过回顾自己第一次的选择来判断在哪一个节点。老了，组织内的每一个人都知道其他人以前的选择）



# 信息集

**完美信息博弈（Games of perfect information）**

博弈树里的所有信息集都只包含一个节点，并且结果没有随机性。

**不完美信息博弈（Games of imperfect information）**

不是完美信息博弈的博弈。

- 任何同时博弈都是不完美信息博弈

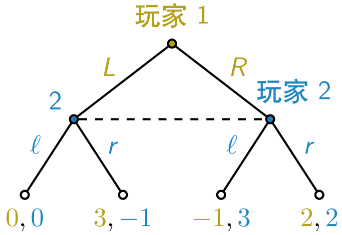
**纯策略**

玩家 $i$ 的一个纯策略是一个**完整的**行动方案，它规定了玩家 $i$ 将在每一个信息集中采取什么行为[1]。

[1] 混合策略仍是纯策略的一个概率分布，属于事前策略（先随机选择后遵循），无法表示在某些节点上的随机行为。而一个行为策略（Behavioral strategy）为每一个信息集确定了一个独立随机分布。但在完美记忆下，这两类策略等价。

# 例子一

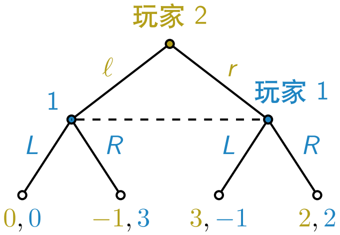
- 由于玩家 2 不能区分玩家 1 的行为，所以两个决策节点位于同一信息集
- 玩家 2 的行动方案是在两个节点都选择 $\ell$ 或者 $r$
- $BR_2 = \ell$




| | | 玩家 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $\ell$ | $r$ |
| 玩家 1 | $L$ | $\underline{0}, \underline{0}$ | $\underline{3}, -1$ |
| | $R$ | $-1, \underline{3}$ | $2, 2$ |

# 例子一

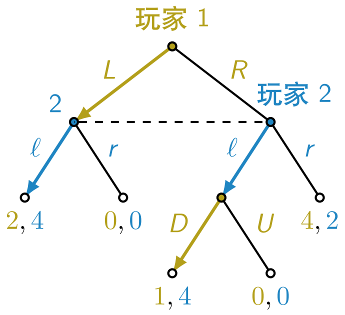
- 其实双方都不知道对方做了什么
- 三种表示方式等价（博弈树和效用矩阵之间的转换）
- 关键在于信息（知道什么，什么时候知道），而不是决策顺序
- 如果信息可以改变你的决定，那么它就是有价值的




| | | 玩家 2 $\ell$ | 玩家 2 $r$ |
|---|---|---|---|
| 玩家 1 | $L$ | $\underline{0}, \underline{0}$ | $\underline{3}, -1$ |
| 玩家 1 | $R$ | $-1, \underline{3}$ | $2, 2$ |

# 例子二

- 玩家 1 有两个信息集，玩家 2 有一个信息集
- $NE = (LD, \ell)$、$(LU, \ell)$ 和 $(RU, r)$
- 逆向归纳法得不到后两个均衡，因此纳什均衡具有不合理性，需要一个更精炼的解概念




玩家 2

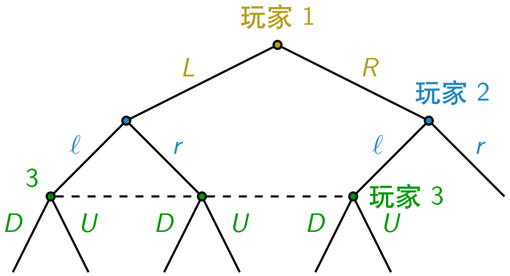
| 玩家 1 | ℓ | r |
|---|---|---|
| LD | 2, 4 | 0, 0 |
| LU | 2, 4 | 0, 0 |
| RD | 1, 4 | 4, 2 |
| RU | 0, 0 | 4, 2 |

# 子博弈

## 子博弈（Subgame）

一个子博弈是整个博弈的一部分，就像博弈中的博弈。它满足：

(i) 从单个节点开始
(ii) 由此节点和所有后继节点组成
(iii) 不分裂任何信息集（以下博弈树有几个子博弈？）



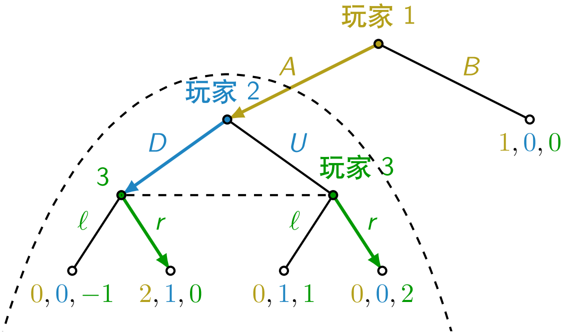
# 子博弈完美纳什均衡

**子博弈完美纳什均衡（Subgame perfect equilibrium，SPE）**

如果一个纳什均衡 $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n*)$ 包含了每一个子博弈的纳什均衡，则称它是子博弈完美纳什均衡。

- 希望排除不能指导玩家后续最优行为的纳什均衡
- 求解方法：从后向前找出每一个子博弈的纳什均衡，然后从整个博弈中排除不包含子博弈纳什均衡的的纳什均衡

# 例子三：三个玩家



# 例子三：三个玩家

- 玩家 1 选择 $A$ 和 $B$ 等价于选择如下两个效用矩阵
- 有许多纳什均衡，例如 $(B, U, \ell)$ 和 $(A, D, r)$

玩家 3

| | | $\ell$ | $r$ |
|---|---|---|---|
| 玩家 2 | $D$ | $0, 0, -1$ | $2, 1, 0$ |
| | $U$ | $0, 1, 1$ | $0, 0, 2$ |

玩家 3

| | | $\ell$ | $r$ |
|---|---|---|---|
| 玩家 2 | $D$ | $1, 0, 0$ | $1, 0, 0$ |
| | $U$ | $1, 0, 0$ | $1, 0, 0$ |

# 例子三：三个玩家

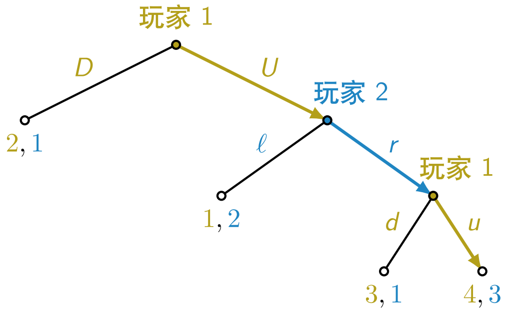
- 考虑最后一个子博弈
- $r$ 是严格占优策略，$NE = (D, r)$
- 因此可以排除 $(B, U, \ell)$，$(A, D, r)$ 是子博弈完美纳什均衡

玩家 3

| 玩家 2 | $\ell$ | $r$ |
|---|---|---|
| $D$ | $0, -1$ | $\underline{1}, \underline{0}$ |
| $U$ | $\underline{1}, 1$ | $0, \underline{2}$ |

## 例子四：别选错了

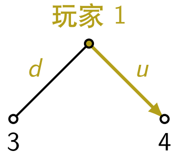
- $NE = (Uu, r)$、$(Du, \ell)$、$(Dd, \ell)$
- 第一个均衡可由逆向归纳法得到。在第二和三个均衡中，玩家 1 担心玩家 2 错选 $\ell$ 而选择 $D$




| 玩家 1 \ 玩家 2 | $\ell$ | $r$ |
|---|---|---|
| $Uu$ | $1, 2$ | $\underline{4}, \underline{3}$ |
| $Ud$ | $1, \underline{2}$ | $3, 1$ |
| $Du$ | $\underline{2}, \underline{1}$ | $2, \underline{1}$ |
| $Dd$ | $\underline{2}, \underline{1}$ | $2, \underline{1}$ |

# 例子四：别选错了

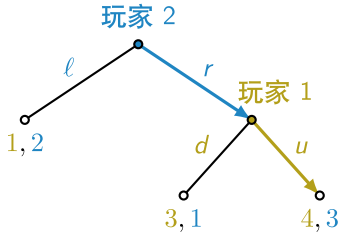
- 考虑最后一个子博弈
- $NE = u$
- 第三个纳什均衡 $(Dd, \ell)$ 被排除了，因为它规定的 $d$ 在这个子博弈中不是纳什均衡
- 写出完整的决策方案有助于其他玩家决策以及排除候选纳什均衡




| | | |
|---|---|---|
| 玩家 1 | $u$ | 4 |
| | $d$ | 3 |

# 例子四：别选错了

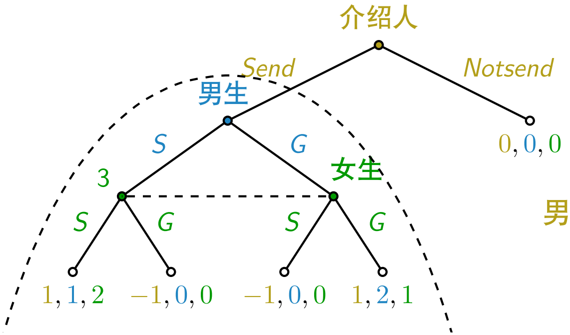
- 考虑倒数第二个子博弈
- $NE = (u, r)$ 和 $(d, \ell)$
- 第二个纳什均衡 $(Du, \ell)$ 被排除了，因为它规定的 $(u, \ell)$ 在这个子博弈中不是纳什均衡
- $(Uu, r)$ 是子博弈完美纳什均衡，也是逆向归纳法的结果




| | | 玩家 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $\ell$ | $r$ |
| 玩家 1 | $u$ | $\underline{1}, \underline{2}$ | $\underline{4}, \underline{3}$ |
| | $d$ | $\underline{1}, \underline{2}$ | $3, 1$ |

# 介绍人游戏

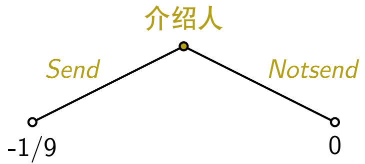
- 子博弈的纯策略纳什均衡 $= (G, G)$ 和 $(S, S)$
- 两个均衡下的介绍人效用都是 1，因此介绍人会选择 Send
- 子博弈完美纳什均衡 $= (Send, G, G), (Send, S, S)$




| | | 女生 | |
|---|---|---|---|
| | | $G$ | $S$ |
| 男生 | $G$ | $\underline{1}, \underline{2}$ | $0, 0$ |
| | $S$ | $0, 0$ | $\underline{1}, \underline{2}$ |

# 还有一个 SPE

- 在子博弈中，还存在一个混合策略纳什均衡 $= ((2/3, 1/3), (1/3, 2/3))$
- 如果介绍人介绍男生和女生认识，则他们相遇的概率是 $2/9 + 2/9 = 4/9$
- 介绍人选择 Send 的期望效用 $= \frac{4}{9} * 1 + \frac{5}{9} * (-1) = -\frac{1}{9}$
- 子博弈完美纳什均衡 $= (\mathit{Notsend}, \mathit{Mix}, \mathit{Mix})$

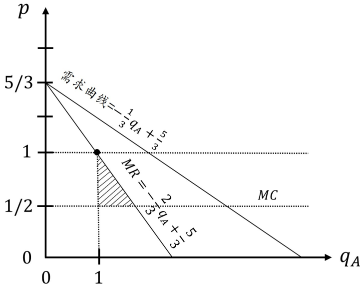


# 设备租赁游戏

- 据说这是美国投行的经典面试题
- 有两个生产商处于古诺竞争中
    - 价格 $p = 2 - \frac{1}{3} * (q_A + q_B)$
    - 每单位生产成本 $c = 1$
    - $q^* = \frac{a-c}{3b} = 1$
    - $p^* = 2 - \frac{1}{3} * (1+1) = \frac{4}{3}$
    - 每个生产商的利润 $= (\frac{4}{3} - 1) * 1 = \frac{1}{3}$
- 现在生产商 $A$ 可以花费 $0.7$ 来租用一个新设备，使可变成本 $c$ 降至 $0.5$
- 生产商 $A$ 先决定是否租用设备，两个公司再进行古诺博弈
- 请问生产商 $A$ 应该租用设备吗?

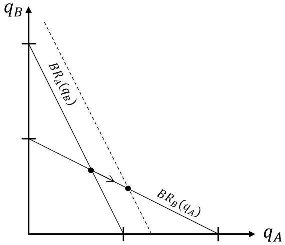
# 游戏分析

- 假如你是一位会计
  - 产量为 1，可变成本下降 0.5 可节省生产成本 0.5
  - 固定成本增加 0.7，因此不租（×，因为产量会发生改变）
- 假如你是一位经济分析师
  - 给定 $B$ 的产量后，$A$ 在剩余市场中是垄断者
  - 根据 $MR = MC$，$q_A$ 会上升
  - 矩形面积 $0.5+$ 三角形面积 $0.19 = 0.69 < 0.7$，因此选择不租



# 游戏分析

- 假如你学过博弈论（看均衡点的变化）
  - 由于古诺模型是策略性替代游戏，$q_A$ 上升会导致 $q_B$ 下降
  - 重新计算子博弈中的古诺均衡，可以得到生产商 $A$ 的利润增加了 $1 > 0.7$，因此应该租用设备




**经验 17（Strategic effect）**

当情况发生改变时，不要将对手以前的行为代入你的新决策中。要注意对手策略性行为的影响，即他们的行为在新情况下会变。

*Thanks!*